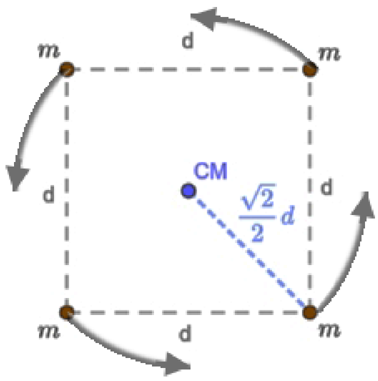
GABARITO COMENTADO

Olimpíada Brasileira de Astronomia e Astronáutica

3ª PROVA ONLINE DE 20 DE DEZEMBRO DE 2024

- PROCESSO DE SELEÇÃO DAS EQUIPES INTERNACIONAIS DE 2025 -

1) Considere um sistema em que quatro asteroides idênticos de massa m estão dispostos a formar um quadrado de lado d, onde cada asteroide ocupa um dos vértices.



Considerando apenas o efeito gravitacional que cada um exerce sobre os outros e que a distância entre eles permaneça inalterada, qual seria a velocidade orbital de cada asteroide em relação ao centro de massa do sistema?

a) $v = \sqrt{\frac{Gm}{d}}$

b) $v = \sqrt{\frac{Gm}{d}\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)}$

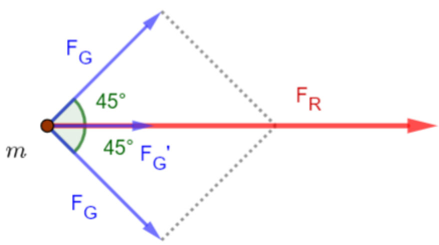
c) $v = \sqrt{\frac{Gm}{d}\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{4}\right)}$

d) $v = \sqrt{\frac{Gm}{d}\left(2 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)}$

e) $v = \frac{m}{d}\sqrt{G\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{4}\right)}$

Resposta: c) $v = \sqrt{\frac{Gm}{d}\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{4}\right)}$

Para um satélite localizado em qualquer um dos vértices, teremos o seguinte diagrama de forças:



Desta maneira, o módulo da força resultante F_R em cada asteroide será:

$$F_R = 2 \times G \frac{m \cdot m}{d^2} (\cos 45°) + G \frac{m \cdot m}{\left(\sqrt{2}d\right)^2}$$

$$F_R = \frac{2Gm^2}{d^2} \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{Gm^2}{2d^2} \rightarrow F_R = G \frac{m^2}{2d^2} \left(2\sqrt{2} + 1\right)$$

Da geometria do problema, temos que cada asteroide orbita o centro de massa do sistema a uma distância $r = \frac{d\sqrt{2}}{2}$. Como a força F_R atua como resultante centrípeta R_{CP}, a velocidade orbital de cada asteroide será dada por:

$$R_{CP} = F_R$$

$$\frac{mv^2}{r} = G \frac{m^2}{2d^2} \left(2\sqrt{2} + 1\right)$$

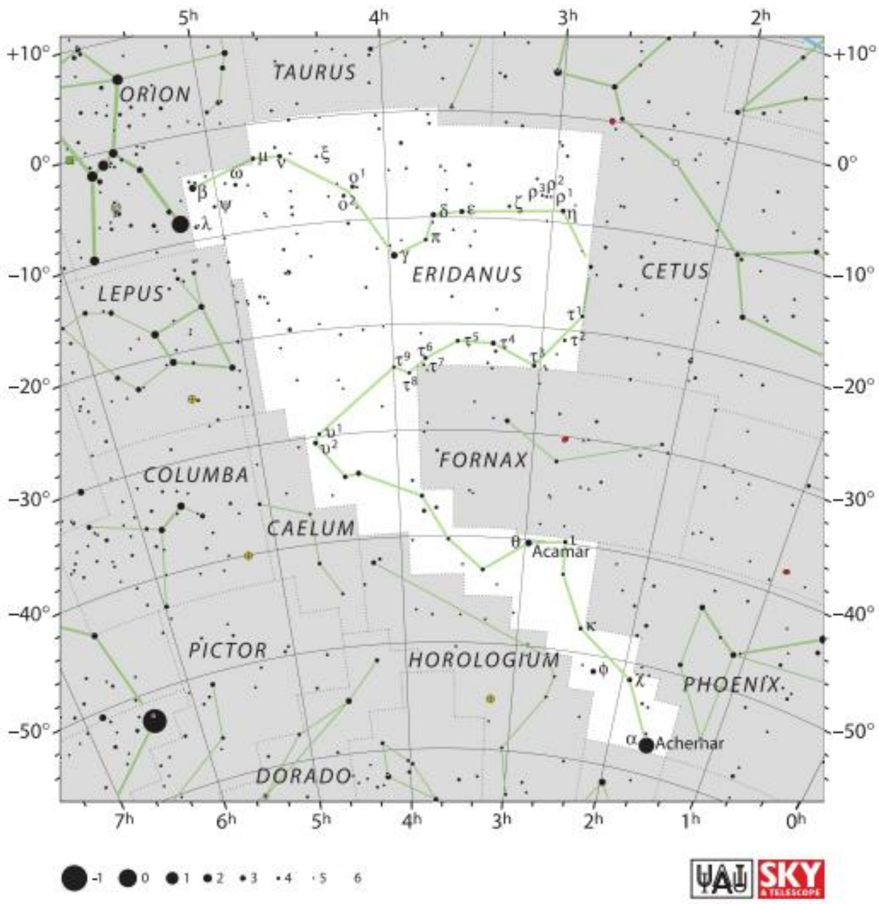
$$\frac{mv^2}{\frac{d\sqrt{2}}{2}} = G \frac{m^2}{2d^2} \left(2\sqrt{2} + 1\right)$$

$$v^2 = \frac{d\sqrt{2}}{2m} \times G \frac{m^2}{2d^2} \left(2\sqrt{2} + 1\right)$$

$$v^2 = \frac{Gm}{d} \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{4}\right)$$

$$v = \sqrt{\frac{Gm}{d} \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{4}\right)}$$

2) A estrela Alpha Eridani, conhecida como Achernar, é a nona estrela mais brilhante do céu, no extremo sul da longa constelação Erídano.



Achernar tem magnitude aparente m = +0,45 e sua paralaxe estelar vale *p* = (23,39 ± 0,57) *mas* (milissegundos de arco).

Assinale a opção que traz a incerteza associada à magnitude absoluta M de Achernar.

a) ± 0,11

b) ± 0,23

c) ± 0,39

d) ± 0,45

e) ± 0,57

Resposta: a) ± 0,11

Primeiro vamos calcular as distâncias mínima e máxima, em parsec:

$$d_{min} = \frac{1}{p_{max}} = \frac{1}{(23{,}96 \times 10^{-3})''} \rightarrow d_{min} \cong 41{,}74\ pc$$

$$d_{max} = \frac{1}{p_{min}} = \frac{1}{(22{,}82 \times 10^{-3})''} \rightarrow d_{max} \cong 43{,}82\ pc$$

Do módulo de distância, temos:

$$M = m - 5\log d + 5$$

$$\Delta M = -5(\log d_{max} - \log d_{min}) = -5\left(\log\frac{d_{max}}{d_{min}}\right)$$

ou

$$\Delta M = -5(\log d_{min} - \log d_{max}) = -5\left(\log\frac{d_{min}}{d_{max}}\right)$$

Substituindo-se os valores:

$$\Delta M = -5\left(\log\frac{43{,}82}{41{,}74}\right) \rightarrow \Delta M \cong -0{,}11$$

ou

$$\Delta M = -5\left(\log\frac{41{,}74}{43{,}82}\right) \rightarrow \Delta M \cong +0{,}11$$

Então: $\Delta M = \pm\, 0{,}11$

GABARITO COMENTADO

Olimpíada Brasileira de Astronomia e Astronáutica

3) Na astrofísica, o **Comprimento de Jeans λ_J** é uma medida do raio de uma nuvem de gás em que a pressão interna suporta exatamente a nuvem contra o colapso devido à gravidade.

Tem esse nome em homenagem ao astrônomo britânico Sir James Jeans (1877-1946), que estudou a estabilidade de nuvens esféricas no início do século XX.

O Comprimento de Jeans depende da velocidade do som no gás **v_s,** da Constante Gravitacional **G** e da densidade da nuvem **ρ**.

A dependência entre os elementos pode ser expressa através da fórmula:

$\lambda_J \propto v_s^{\alpha} G^{\beta} \rho^{\gamma}$ (lê-se, "λ_J é proporcional a...")

Assinale a opção que traz os valores dos expoentes α, β e γ para que λ_J tenha a unidade (ou dimensão) correta.

Dados: $G = 6{,}67 \times 10^{-11}$ kg^{-1}m^{3}s^{-2}

a) $\alpha = 1/2$; $\beta = -1/2$ e $\gamma = -1$

b) $\alpha = 1/2$; $\beta = -1$ e $\gamma = -1/2$

c) $\alpha = 1$; $\beta = -1/2$ e $\gamma = -1/2$

d) $\alpha = -1$; $\beta = 1/2$ e $\gamma = 1/2$

e) $\alpha = 1$; $\beta = 1$ e $\gamma = 1$

Resposta: c) $\alpha = 1$; $\beta = -1/2$ e $\gamma = -1/2$

Em análise dimensional utilizamos apenas três grandezas comprimento, tempo e massa, as quais são representadas pelas letras L, T e M, respectivamente. Assim, temos:

$$\lambda_J = v_s^{\alpha} G^{\beta} \rho^{\gamma}$$

$$[\lambda_J] = L^1$$

$$[v_s] = L^1 T^{-1}$$

$$[G] = L^3 T^{-2} M^{-1}$$

$$[\rho] = L^{-3} M^1$$

Equacionando as dimensões:

$$L^1 = (L^1 T^{-1})^{\alpha} (L^3 T^{-2} M^{-1})^{\beta} (L^{-3} M^1)^{\gamma}$$

Agrupando os termos:

$$L^1 T^0 M^0 = (L)^{\alpha+3\beta-3\gamma} (T)^{-\alpha-2\beta} (M)^{-\beta+\gamma}$$

Temos três equações que têm que ser resolvidas simultaneamente:

$$\alpha + 3\beta - 3\gamma = 1$$

$$-\alpha - 2\beta = 0$$

$$-\beta + \gamma = 0$$

Da segunda equação temos que $\alpha = -2\beta$ e da terceira, $\beta = \gamma$.

Substituindo na primeira, temos:

$$-2\beta + 3\beta - 3\beta = 1 \rightarrow -2\beta = 1 \rightarrow \beta = -\frac{1}{2} = \gamma$$

resolvendo para α:

$$\alpha = -2\beta \rightarrow \alpha = -2 \times -\frac{1}{2} \rightarrow \alpha = 1$$

$$\alpha = 1, \qquad \beta = -\frac{1}{2}, \qquad \gamma = -\frac{1}{2}$$

Logo,

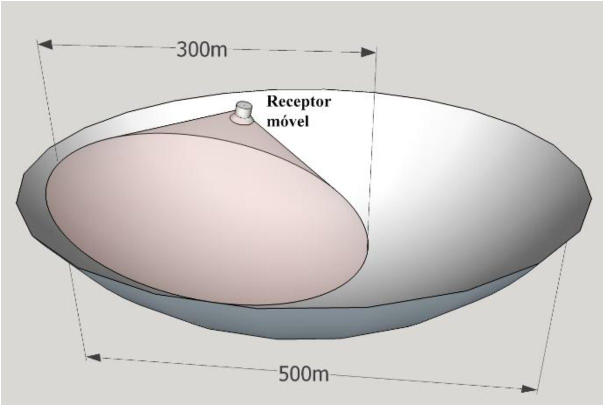
$$\lambda_J \propto \frac{v_s}{\sqrt{G\rho}}$$

GABARITO COMENTADO

Olimpíada Brasileira de Astronomia e Astronáutica

4) O *Five-hundred-meter Aperture Spherical Telescope* (FAST), apelidado de Tianyan ("Olho do Céu"), é um radiotelescópio localizado na depressão de Dawodang, uma bacia natural no Condado de Pingtang, Guizhou, sudoeste da China.

Embora o diâmetro do disco refletor seja de 500 m, seu receptor, que pode ser apontado para diferentes posições no céu, capta ondas de apenas um círculo de 300 m de diâmetro útil.



Desenho adaptado: Phoenix7777 - Creative Commons.

A frequência de trabalho do receptor varia de f_1 = 70,0 MHz a f_2 = 3,0 GHz.

Baseado nas informações e em seus conhecimentos, avalie os instrumentos a seguir (numerados de I a V) e assinale a opção que traz a(s) luneta(s) que tem(êm) a resolução angular teórica equivalente ou maior, na faixa do visível (λ = 550 nm), à máxima resolução angular teórica, na faixa do rádio do FAST. Desconsidere a turbulência atmosférica.

a) somente V

b) somente IV e V

c) somente III, IV e V

d) somente II, III, IV e V

e) todas

Resposta: e) Todas

Primeiro, vamos calcular os comprimentos de onda relativos às frequências de trabalho do receptor do FAST. Como as ondas de rádio são ondas eletromagnéticas, sua velocidade é a velocidade da luz. A velocidade c de propagação de uma onda eletromagnética pode ser equacionada, como:

$$c = \lambda f \leftrightarrow \lambda = \frac{c}{f}$$

$$\lambda_1 = \frac{300.000.000\ m/s}{70{,}0 \times 10^6\ Hz} \cong 4{,}3\ m$$

$$\lambda_2 = \frac{300.000.000\ m/s}{3{,}0 \times 10^9\ Hz} = 0{,}1\ m$$

Em seguida vamos usar o Critério de Rayleigh para calcular a resolução angular do FAST, em sua resolução máxima, considerando apenas sua área útil de captação:

$$\theta_{min} = 1{,}22 \frac{\lambda_2}{D}$$

$$\theta_{min} = 1{,}22 \frac{0{,}1\ m}{300\ m} \cong 4{,}1 \times 10^{-4}\ rad$$

Em segundos de arco:

$$\theta_{min} = \frac{4{,}1 \times 10^{-4} \times 180° \times 60'/_{°} \times 60''/_{'}}{\pi} \rightarrow \theta_{min} \cong 84{,}6''$$

Agora vamos calcular o diâmetro de um telescópio para ter a mesma resolução angular teórica para o comprimento de onda λ = 550 nm.

$$4{,}1 \times 10^{-4}\ rad = 1{,}22 \frac{550 \times 10^{-9}\ m}{D}$$

$$D = 1{,}22 \frac{550 \times 10^{-9}\ m}{4{,}1 \times 10^{-4}\ rad} \rightarrow D \cong 1{,}6 \times 10^{-3}\ m = 1{,}6\ mm \approx 2\ mm$$

Portanto, todos os instrumentos apresentados apresentam resolução angular, na faixa do visível, maior do que resolução angular do FAST, pois todos têm objetivas com diâmetros maiores do que 2 mm.

5) De um satélite artificial em torno da Terra, sabemos que a excentricidade da sua órbita vale e = 0,8 e que seu perigeu se dá a 9 raios terrestres de altitude.

Assinale a opção que traz a razão entre os módulos das velocidades desse satélite no perigeu e no apogeu, ou seja v_p/v_a.

Dados: massa da Terra $M_T = 6{,}0 \times 10^{24}$ kg; raio da Terra $R_T = 6.378{,}0$ km

a) 0,2

b) 0,8

c) 1,8

d) 6,0

e) 9,0

Resposta: e) 9,0

Da conservação do momento angular, temos que:

$$r_p v_p = r_a v_a \leftrightarrow \frac{v_p}{v_a} = \frac{r_a}{r_p}$$

Precisamos, então, da expressão para os raios da sua órbita no perigeu e no apogeu.

Das propriedades das elipses, sabemos que:

$$r_p = a(1-e)$$

$$r_a = a(1+e)$$

Então:

$$\frac{v_p}{v_a} = \frac{r_a}{r_p} = \frac{a(1+e)}{a(1-e)} = \frac{(1+e)}{(1-e)}$$

A razão não depende do semieixo maior da órbita, apenas da sua excentricidade.

Substituindo-se os valores:

$$\frac{v_p}{v_a} = \frac{(1+0{,}8)}{(1-0{,}8)} = \frac{1{,}8}{0{,}2} = 9{,}0$$

GABARITO COMENTADO

Olimpíada Brasileira de Astronomia e Astronáutica

6) Considere uma luneta com uma objetiva de diâmetro $\varnothing$ = 15,0 cm e distância focal f = 1,0 m. No plano focal da luneta está um sensor imageador CMOS, com uma matriz de pixels quadrados de 3586 $\times$ 2180, com 2,9 μm de lado.

O astrofotógrafo, dono desse equipamento, quer fazer fotos da famosa cratera de impacto Tycho, que tem seu nome homenageando Tycho Brahe (1546-1601), o astrônomo dinamarquês cujas medições dos movimentos de Marte permitiram que Johannes Kepler (1571-1630) mostrasse que as órbitas dos planetas são elípticas, não circulares.

Imagem: NASA/Goddard/Arizona State University.

Sendo assim, assinale a opção que traz a área aproximada, em pixels², que a imagem da cratera Tycho ocupa no sensor do telescópio. Considere-a circular, sem qualquer efeito de perspectiva.

Dados: Diâmetro da cratera Tycho $\varnothing$ = 86,0 km; Distância média Terra-Lua d_{TL} = 384.400,0 km.

a) 2.180

b) 3.586

c) 4.520

d) 19.006

e) 38.013

Resposta: c) 4.520

Primeiro calculamos o tamanho angular da cratera Tycho:

$$\theta_T = \frac{86{,}0\ km}{384.400{,}0\ km} \cong 2{,}2 \times 10^{-4}\ rad$$

Depois calculamos o tamanho da imagem da cratera Tycho no plano focal da luneta:

$$\emptyset_T = f \times \theta_T \rightarrow \emptyset_T = 1\ m \times (2{,}2 \times 10^{-4}\ rad) = 2{,}2 \times 10^{-4}\ m$$

$$\emptyset_T = 220{,}0\ \mu m$$

A área da imagem, em μm² será:

$$A_T = \pi r_T^2 \rightarrow A_T = \pi(110{,}0\ \mu m)^2 \rightarrow A_T \cong 38.013{,}3\ \mu m^2$$

Dividindo pela área de cada pixel teremos o número de pixels² da imagem:

$$n = \frac{38.013{,}3\ \mu m^2}{(2{,}9\ \mu m)^2} \rightarrow n \cong 4.520{,}0\ pixels^2$$

7) Quando a NASA enviou humanos à Lua em 1969, um dos muitos perigos que a agência teve que prever foi a penetração de rochas espaciais nos trajes ou equipamentos dos astronautas. Ao contrário da Terra, que tem uma atmosfera protetora na qual meteoroides geralmente se desintegram, a Lua é vulnerável a quaisquer rochas, ou mesmo partículas, que estejam voando pelo espaço.

Felizmente, os astronautas não estavam em muito perigo. De acordo com os especialistas da NASA, as chances de um astronauta ser atingido por um objeto do tamanho de um milímetro é de 1 em 1 milhão por hora por pessoa. Um milímetro é quanto um meteoroide precisa ter de tamanho para penetrar no traje espacial de um astronauta.

A NASA e outras agências estão se preparando para enviar humanos de volta à Lua nos próximos anos e, algum dia, estabelecer uma base orbitando a Lua ou em sua superfície. Então é muito importante entender a frequência com que uma determinada área do nosso satélite natural sofre um impacto.

Considere que, atualmente, cerca de 100 meteoroides do tamanho de bolas de pingue-pongue estão atingindo a Lua por dia. Apesar do seu pequeno tamanho, cada uma dessas rochas impacta a superfície com velocidades de algumas dezenas de km/s, podendo causar grandes estragos. Considere, também, que esses 100 meteoroides diários caem por toda a superfície da Lua, com igual probabilidade, sem uma região preferencial de queda.

Sendo assim, assinale a opção que traz de quanto em quanto anos, aproximadamente, um meteoroide desses atingirá uma base lunar de 1 km^2 de área.

Dados: Diâmetro equatorial da Lua $\varnothing$ = 3.474,8 km

a) 1 a cada 100 anos

b) 1 a cada 1.000 anos

c) 1 a cada 10.000 anos

d) 1 a cada 100.000 anos

e) 1 a cada 1.000.000 anos

Resposta: b) 1 a cada 1.000 anos

Primeiro vamos calcular quantos meteoroides do tamanho de bolas de pingue-pongue caem na Lua em 1 ano:

$$n = 100\,\frac{\text{meteoroides}}{dia} \times 365\,\frac{dias}{ano} \rightarrow n = 36.500/ano$$

Devemos considerar que todos têm a mesma probabilidade de cair em qualquer lugar da superfície da Lua. Vamos precisar, então, do valor da área total da superfície lunar:

$$A = 4\pi(r_{Lua})^2$$

$$A = 4\pi\left(\frac{3.474,8\ km}{2}\right)^2 \rightarrow A \cong 3,8 \times 10^7\ km^2$$

Temos que 36.500 meteoroides caem por ano espalhados por $3,8 \times 10^7$ km^2. Vamos usar uma regra de três simples para calcular quanto devemos esperar para que 1 meteoroide caia em 1 km^2.

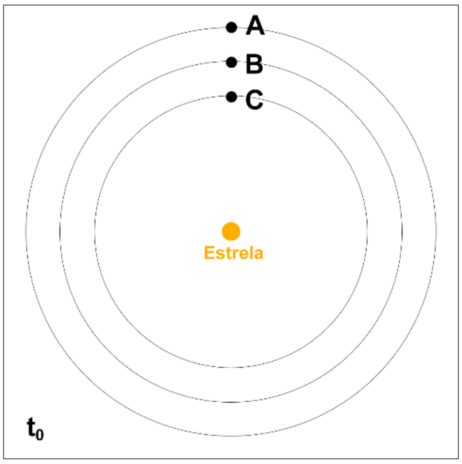
$$\frac{36.500/ano}{3{,}8 \times 10^7\ km^2} = \frac{1/x}{1\ km^2} \to x = \frac{3{,}8 \times 10^7}{36.500}\ anos$$

$$x \cong 1{,}0 \times 10^3\ anos = 1.000\ anos$$

GABARITO COMENTADO

Olimpíada Brasileira de Astronomia e Astronáutica

8) Considere um sistema de três planetas A, B, C, orbitando uma estrela. Em um determinado dia (t_0), eles estão em conjunção (veja figura, fora de escala).



Cada planeta orbita a estrela no sentido horário, de modo que o planeta A dá uma volta completa em 5,0 anos, o planeta B, em 4,0 anos e o planeta C, em 3,0 anos.

Depois de quantos anos (completos), os planetas A e C estarão novamente em conjunção, mas o planeta B estará em oposição a eles?

a) 15 anos

b) 20 anos

c) 25 anos

d) 30 anos

e) 60 anos

Resposta: d) 30 anos

Primeiramente vamos calcular o tempo para que os planetas A e C fiquem novamente em conjunção, ou seja, calcular o período sinódico S dos planetas:

$$\frac{1}{S} = \frac{1}{P_C} - \frac{1}{P_A}$$

$$\frac{1}{S} = \frac{1}{3} - \frac{1}{5} \to S = \frac{15}{2} = 7{,}5\ anos$$

Agora vamos examinar o comportamento do planeta B a cada 7,5 anos.

Em 7,5 anos o planeta B dá:

$$\frac{1\ volta \times 7{,}5\ anos}{4\ anos} = 1{,}875\ volta$$

Em 15 anos o planeta B dá:

$$\frac{1\ volta \times 15\ anos}{4\ anos} = 3{,}75\ voltas$$

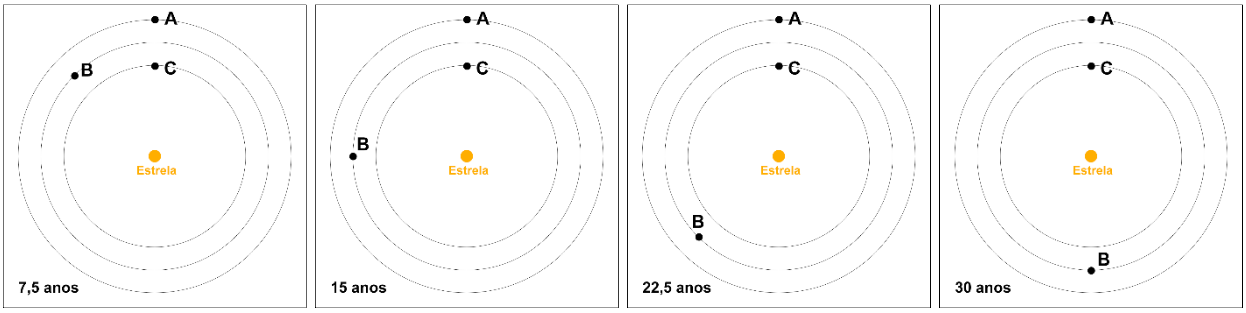
Em 22,5 anos o planeta B dá:

$$\frac{1\ volta \times 22{,}5\ anos}{4\ anos} = 5{,}625\ voltas$$

Em 30 anos o planeta B dá:

$$\frac{1\ volta \times 30\ anos}{4\ anos} = 7{,}5\ voltas$$

Em 30 anos, o planeta A dá 6 voltas completas, o planeta C dá 10 voltas completas e o planeta B dá 7 voltas completas mais meia volta, portanto ficando em oposição aos outros dois planetas.



GABARITO COMENTADO

Olimpíada Brasileira de Astronomia e Astronáutica

9) Na física, um corpo negro é um objeto teórico que absorve toda a radiação que chega até ele. A temperatura desse corpo negro depende da quantidade de radiação absorvida, que por sua vez determina as frequências e as intensidades da radiação eletromagnética que ele emite.

Um buraco negro isolado é um corpo negro quase perfeito e, como tal, segue regras semelhantes de emissão e absorção. A temperatura de um buraco negro (em primeira aproximação) é a radiação que ele emite, chamada **Radiação Hawking**, e depende apenas da sua massa. A relação entre a temperatura T_{BN} e a massa M_{BN} de um buraco negro está definida na seguinte equação:

$$T_{BN} = \frac{hc^3}{16\pi^2 G M_{BN} k_B}$$

onde: ***h*** é a Constante de Planck, ***c*** é a velocidade da luz, ***G*** é a Constante Gravitacional Universal e $\boldsymbol{k_B}$ é a Constante de Boltzmann.

Na realidade, muitos dos buracos negros encontrados no Universo absorvem e interagem com outros objetos massivos. Portanto, sua temperatura real é diferente da temperatura esperada do corpo negro.

Vamos considerar um sistema binário não interativo, composto por uma estrela e um buraco negro. Por “não interativo” entenda que não há troca de matéria entre a estrela e o buraco negro e, portanto, não há um disco de acreção em torno dele. A influência mútua é apenas gravitacional.

A estrela tem supostamente 2,5 vezes a massa do Sol e ela gira em torno do centro de massa do sistema com período orbital P = 81 dias e semieixo maior a = 0,68 UA.

Com essas informações, assinale a opção que traz a temperatura teórica aproximada desse buraco negro.

Dados: $h = 6{,}63 \times 10^{-34}$ Js; $c = 3{,}00 \times 10^{8}$ ms^{-1}; $G = 6{,}67 \times 10^{-11}$ Nm^{2}kg^{-2}; $k_B = 1{,}38 \times 10^{-23}$ JK^{-1}; massa do Sol $M_{Sol} = 2{,}00 \times 10^{30}$ kg; UA = $1{,}50 \times 10^{11}$ m

a) $1{,}38 \times 10^{-8}$ K

b) $1{,}58 \times 10^{-8}$ K

c) $3{,}16 \times 10^{-8}$ K

d) $3{,}95 \times 10^{-8}$ K

e) $6{,}32 \times 10^{-8}$ K

Resposta: b) $1{,}58 \times 10^{-8}$ K

Antes de aplicar a fórmula da temperatura, precisamos saber a massa do buraco negro. Para isso vamos usar 3ª Lei de Kepler generalizada:

$$(M + m) = \frac{4\pi^2}{G}\frac{a^3}{P^2}$$

$$M_{BN} = \frac{4\pi^2}{G}\frac{a^3}{P^2} - m_{estrela}$$

Como todos os valores estão em unidades do SI, podemos não escrever as unidades para não sobrecarregar a equação. Substituindo-se os valores, temos:

$$M_{BN} = \frac{4\pi^2}{(6{,}67 \times 10^{-11})} \frac{(0{,}68 \times 1{,}50 \times 10^{11})^3}{\left(81\ dias \times 24 \frac{h}{dia} \times 3.600 \frac{s}{h}\right)^2} - (2{,}50 \times 2{,}00 \times 10^{30})$$

$$M_{BN} \cong 1{,}28 \times 10^{31}\ kg - 5{,}00 \times 10^{30}\ kg = 7{,}80 \times 10^{30}\ kg$$

Agora, basta aplicar a fórmula dada para calcular a temperatura desse BN:

$$T_{BN} = \frac{(6{,}63 \times 10^{-34})(3{,}00 \times 10^{8})^3}{16\pi^2(6{,}67 \times 10^{-11})(7{,}80 \times 10^{30})(1{,}38 \times 10^{-23})}$$

$$T_{BN} \cong 1{,}58 \times 10^{-8}\ K$$

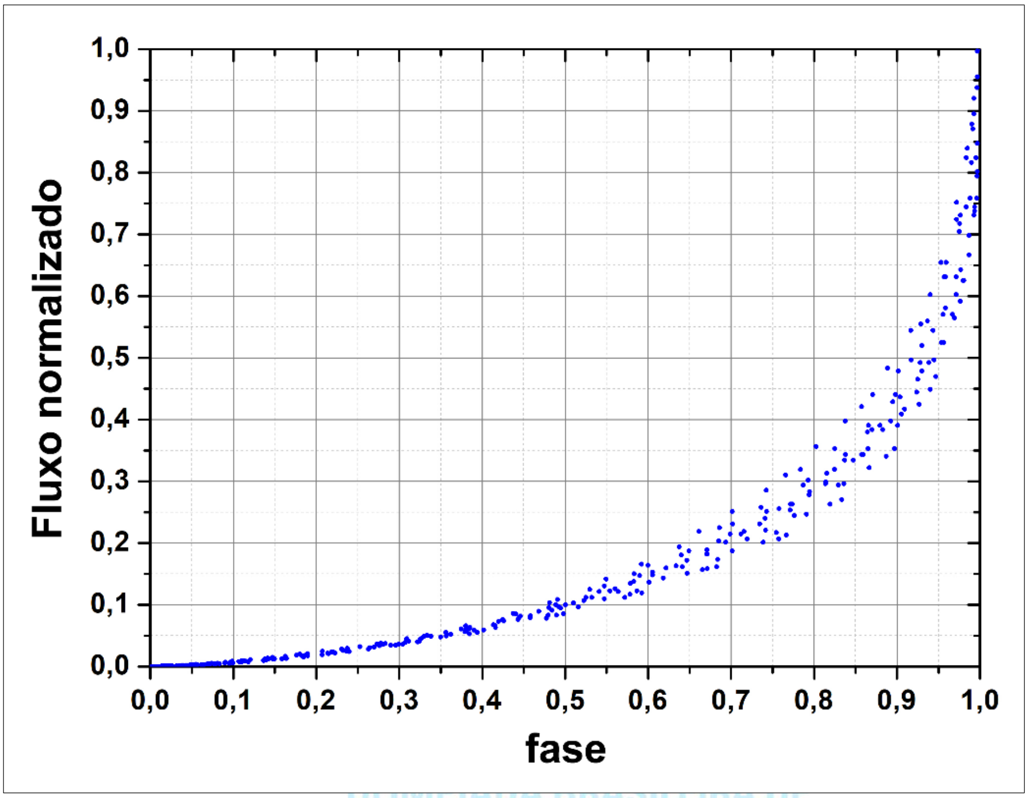
Apenas a título de comparação, a radiação cósmica de fundo em micro-ondas é uma radiação eletromagnética que preenche todo o Universo, cujo espectro é o de um corpo negro a uma temperatura de 2,725 K.

GABARITO COMENTADO

Olimpíada Brasileira de Astronomia e Astronáutica

10) Pela definição, o fluxo F de um corpo celeste é energia por unidade de área e por unidade de tempo que chega ao detector.

No gráfico a seguir temos o fluxo F da Lua, medido na Terra ao longo de 1 ano, em função da sua fase. No eixo das ordenadas, o fluxo foi normalizado de forma que a sua intensidade máxima vale 1,0 (um) e no eixo das abcissas, fase igual a 1,0 significa Lua Cheia. A dispersão dos pontos próximos à Lua Cheia se deve ao fato da medida do fluxo ser mais "sensível" à variação da distância do nosso satélite quando sua superfície está muito iluminada.



Baseado nesse gráfico e em seus conhecimentos assinale a opção que traz a magnitude aparente da Lua em Quarto Crescente. Considere que a magnitude aparente da Lua Cheia vale m = -12,6.

a) -10,1

b) -10,9

c) -11,1

d) -11,3

e) -11,8

Resposta: a) -10,1

Se fase igual a 1,0 corresponde à Lua Cheia, então fase igual a 0,5 corresponderá à Lua em Quarto Crescente.

Pelo gráfico, vemos que o fluxo da Lua, para o quarto Crescente, corresponde a 0,1 (10%) do fluxo máximo.

Considerando m_1 a magnitude aparente da Lua Cheia e m_2, a da Lua em Quarto Crescente, podemos equacionar o problema utilizando a relação de Pogson:

$$m_2 - m_1 = -2{,}5\log\left(\frac{F_2}{F_1}\right)$$

Sabemos que $F_2 = 0{,}1F_1$. Então:

$$m_2 - (-12{,}6) = -2{,}5\log\left(\frac{0{,}1F_1}{F_1}\right)$$

$$m_2 = -2{,}5\log(0{,}1) - 12{,}6$$

$$m_2 = 2{,}5 - 12{,}6 = -10{,}1$$

GABARITO COMENTADO

Olimpíada Brasileira de Astronomia e Astronáutica

11) O Sol é o astro mais brilhante em nosso céu, sua magnitude aparente, a 1 UA de distância, vale aproximadamente m_{Sol} = -26,8. A Lua é o segundo astro mais brilhante. Sua magnitude aparente quando seu disco se encontra completamente iluminado, a cerca de 384.000 km de distância, vale aproximadamente m_{Lua} = -12,6.

Sabemos que o brilho de um astro varia com o quadrado da distância. Então, podemos imaginar que, à medida que nos aproximamos da Lua Cheia, seu brilho irá aumentar até que, em uma determinada distância desse astro, seu brilho seja igual ao brilho do Sol, visto da Terra.

Sendo assim, assinale a opção que traz, aproximadamente, essa distância.

Dados, se necessário: diâmetro do Sol $\varnothing_{Sol} = 1{,}4 \times 10^6$ km; diâmetro da Lua $\varnothing_{Lua}$ = 3.474,8 km

a) 555,1 km

b) 568,9 km

c) 570,6 km

d) 586,1 km

e) 691,8 km

Resposta: a) 555,1 km

Vamos usar a Equação de Pogson para descobrir o quão mais brilhante o Sol é em relação à Lua Cheia:

$$m_{Sol} - m_{Lua} = -2{,}5 \log\left(\frac{F_{sol}}{F_{Lua}}\right)$$

$$\frac{(-26{,}8) - (-12{,}6)}{-2{,}5} = \log\left(\frac{F_{sol}}{F_{Lua}}\right)$$

$$5{,}68 = \log\left(\frac{F_{sol}}{F_{Lua}}\right) \rightarrow 10^{5{,}68} = \frac{F_{sol}}{F_{Lua}}$$

$$F_{sol} \cong 478.630{,}1\ F_{Lua}$$

Isso é quantas vezes o Sol brilha mais que a Lua Cheia quando vistos da Terra.

A luminosidade **L** de um astro não depende da sua distância, mas o fluxo **F** (seu brilho) varia com o quadrado da distância **d** que estamos dele.

$$F = \frac{L}{4\pi d^2}$$

Vamos chamar de F_i o fluxo da Lua Cheia à distância atual d_i e de F_f o fluxo da Lua Cheia à nova distância d_f.

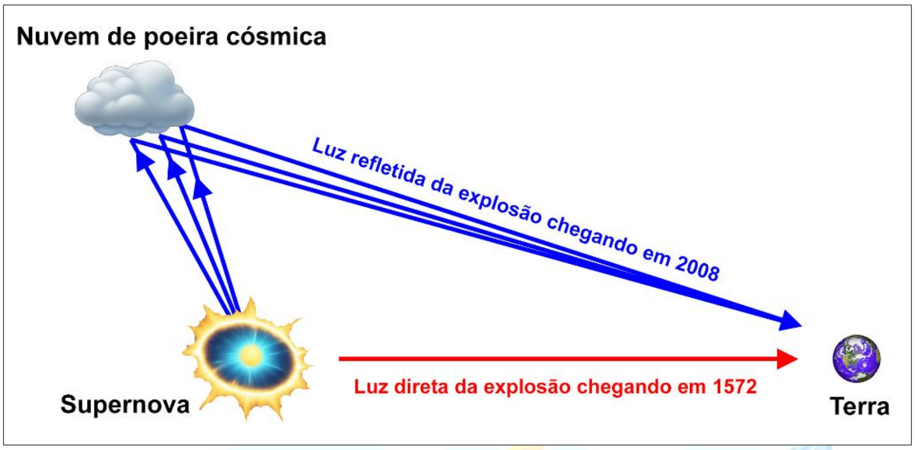
$$\frac{F_f}{F_i} = \frac{L/4\pi d_f^2}{L/4\pi d_i^2} \rightarrow \frac{F_f}{F_i} = \frac{d_i^2}{d_f^2} \rightarrow d_f^2 = \frac{F_i d_i^2}{F_f}$$

Como $F_f = 478.630{,}1\ F_i$, temos:

$$d_f^2 = \frac{F_i d_i^2}{478.630{,}1\ F_i} \rightarrow d_f = \frac{d_i}{\sqrt{478.630{,}1}} \cong \frac{384.000\ km}{691{,}8} \rightarrow d_f \cong 555{,}1\ km$$

12) No início de novembro de 1572, uma “estrela nova” brilhante apareceu na constelação de Cassiopeia e era visível mesmo durante o dia. Entre aqueles que ficaram impressionados com o fenômeno estava o astrônomo dinamarquês Tycho Brahe (1546-1601), que registrou a localização precisa da estrela em seu livro *Stella Nova*. Hoje sabemos que se tratou de uma explosão de supernova e ela ficou conhecida como a Supernova de Tycho [SN 1572].

Em 2008, cientistas do instituto Max Planck usaram telescópios no Havaí e na Espanha para captar os “ecos” da luz da explosão original, refletida por uma nuvem de poeira cósmica. Um esquema, fora de escala, pode ser visto na figura a seguir.



Considere que a SN 1572 está a 7.500 anos-luz de nós e a origem da luz refletida foi localizada a 2° (dois graus) de onde está o remanescente da supernova.

Baseado nessas informações e em seus conhecimentos, assinale a opção que traz a que distância aproximada se encontra a nuvem de poeira da SN 1572.

a) 261 anos-luz.

b) 298 anos-luz.

c) 342 anos-luz.

d) 355 anos-luz.

e) 424 anos-luz.

Resposta: b) 298 anos-luz.

Primeiramente, vamos descobrir em que ano do nosso calendário aconteceu a supernova, sabendo, pela distância fornecida, que sua luz demorou 7.500 anos para chegar até nós.

$$1572 - 7.500 = -5928 \text{ (5928 a.E.C.)}$$

Como a luz refletida chegou em 2008, o tempo percorrido pela luz foi de:

$$2008 - (-5.928) = 7.936 \text{ anos}$$

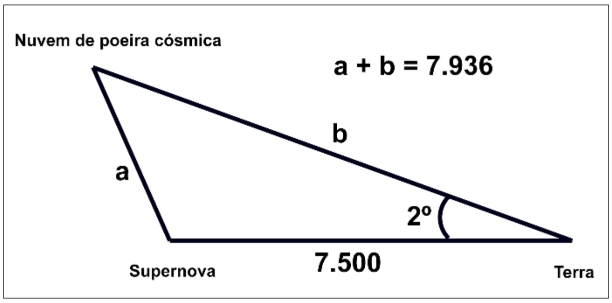
A distância percorrida pela luz, da supernova até à nuvem e da nuvem até à Terra será:

$$S = vt \rightarrow S = ct \rightarrow S = c \times 7.936 \text{ anos} = 7.936 \text{ anos-luz}$$

A geometria do problema, fora de escala, pode ser vista no esquema a seguir.

GABARITO COMENTADO

Olimpíada Brasileira de Astronomia e Astronáutica



Pela lei dos cossenos da geometria plana, temos:

$$a^2 = b^2 + (7.500)^2 - 2b(7.500)\cos(2°)$$

Como: a + b = 7.936 → b = 7.936 – a

Fazendo a substituição, poderemos resolver a equação para ***a***, que é o valor procurado.

$$a^2 = (7.936 - a)^2 + (7.500)^2 - 2(7.936 - a)(7.500)\cos(2°)$$

$$a^2 = 7.936^2 - 2(7.936a) + a^2 + 7.500^2 - [2(7.936)(7.500)\cos(2°) - 2a(7.500)\cos(2°)]$$

$$15.872a - 15.000a\cos(2°) = 7.936^2 + 7.500^2 - 2(7.936)(7.500)\cos(2°)$$

$$a[15.872 - 15.000\cos(2°)] = 7.936^2 + 7.500^2 - 2(7.936)(7.500)\cos(2°)$$

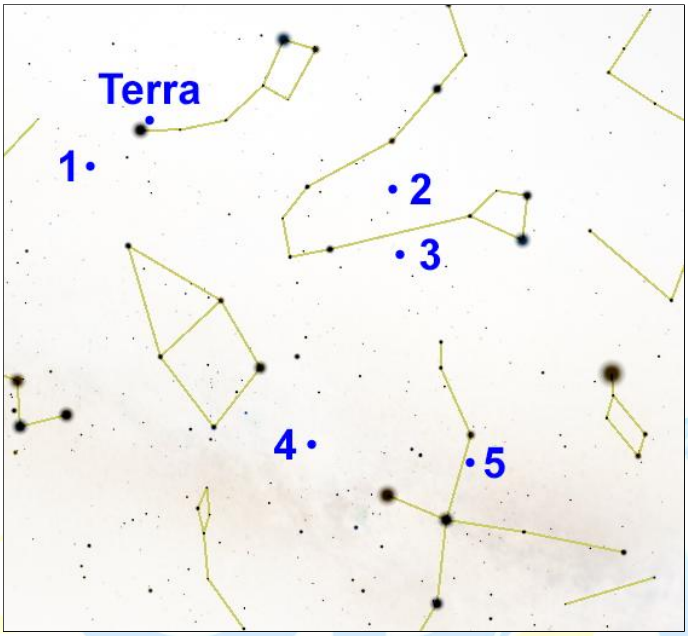
$$a(881) = 7.936^2 + 7.500^2 - 118.967.484$$

$$a = \frac{62.980.096 + 56.250.000 - 118.967.484}{881}$$

$$a = \frac{262.612\ (anos - luz)^2}{881\ (anos - luz)} \cong 298\ anos - luz$$

13) O eixo de rotação da Terra define dois pontos fixos no céu, em torno dos quais a Esfera Celeste parece girar: os Polos Celestes. Para o Hemisfério Norte da Terra, temos uma estrela bem próxima do Polo Celeste Norte (PCN), nossa "estrela polar", conhecida por Polaris (*Alpha Ursae Minoris*). Na verdade, devido à lenta precessão do eixo de rotação da Terra, o PCN está se movendo lentamente para mais perto de Polaris. Sua aproximação máxima ocorrerá no início do ano de 2102, para depois começar a se afastar novamente.

Do mesmo modo, todos os planetas do Sistema Solar (SS) também têm seus Polos Celestes. Na Carta Celeste a seguir, temos marcado o PCN da Terra e de outros planetas do SS, numerados de 1 a 5.



Seguem algumas informações:

- Marte tem seu PCN localizado no céu escuro entre as constelações de Cefeu e Cisne;
- Os PCNs de Mercúrio e de Júpiter estão na constelação do Dragão;
- A declinação do PCN de Júpiter é maior do que a do PCN de Mercúrio;
- Saturno tem seu PCN localizado no céu escuro da constelação de Cefeu;
- O PCN de Netuno está entre as estrelas *Gamma Cygni* e *Delta Cygni*.

Assinale a opção que faz a correspondência correta entre o número e o respectivo PCN do planeta.

a) 1 – Marte; 2 – Mercúrio; 3 – Júpiter; 4 – Saturno; 5 – Netuno.

b) 1 – Marte; 2 – Júpiter; 3 – Mercúrio; 4 – Saturno; 5 – Netuno.

c) 1 – Saturno; 2 – Mercúrio; 3 –Júpiter; 4 – Netuno; 5 – Marte.

d) 1 – Saturno; 2 – Júpiter; 3 – Mercúrio; 4 – Marte; 5 – Netuno.

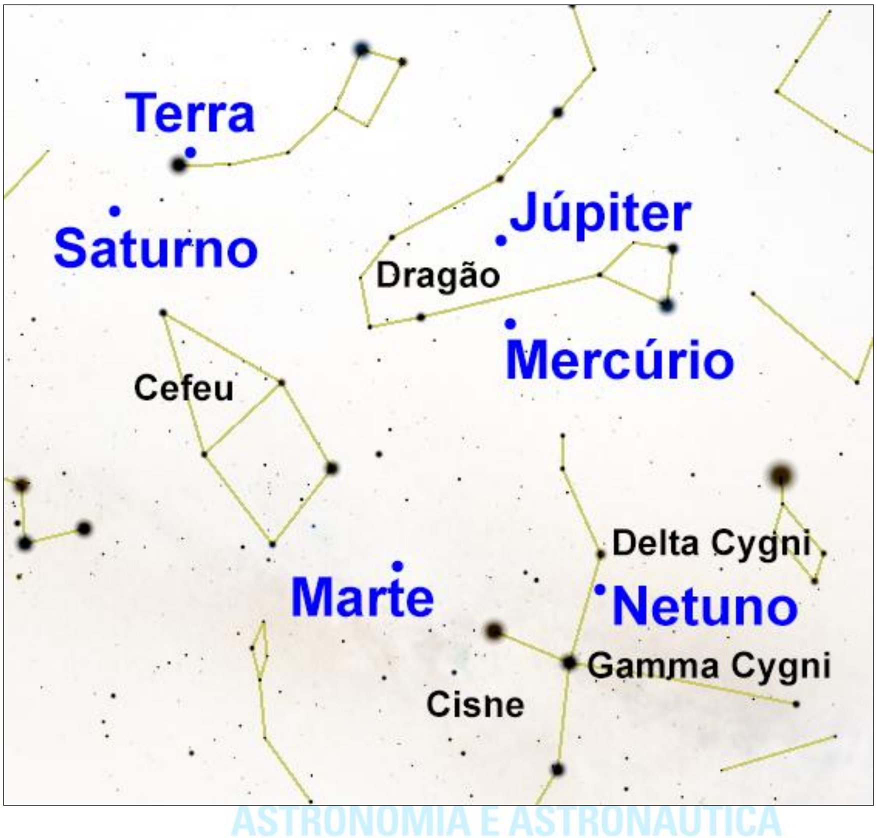
e) 1 – Saturno; 2 – Júpiter; 3 – Marte; 4 – Mercúrio; 5 –Netuno.

GABARITO COMENTADO

Olimpíada Brasileira de Astronomia e Astronáutica

Resposta: d) 1 – Saturno; 2 – Júpiter; 3 – Mercúrio; 4 – Marte; 5 – Netuno.

Comentário: Como o PCN de Júpiter está mais próximo do PCN da Terra (mais afastado do Equador Celeste), sua declinação é maior do que a declinação do PCN de Mercúrio.

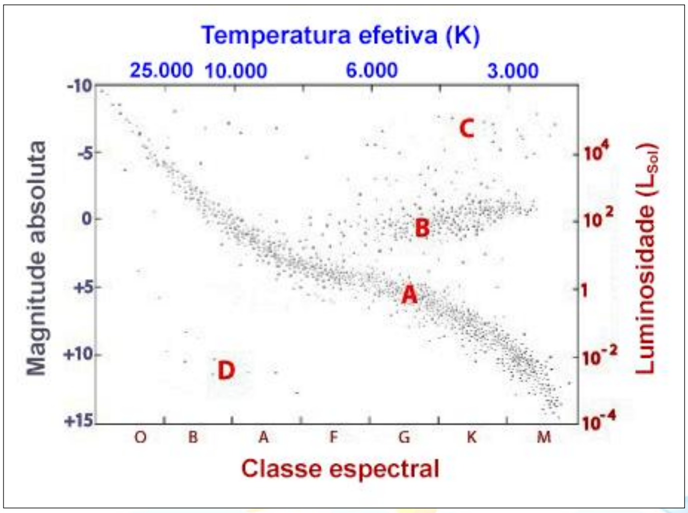


GABARITO COMENTADO

Olimpíada Brasileira de Astronomia e Astronáutica

14) O Diagrama de Hertzsprung-Russell, conhecido como diagrama HR, foi publicado independentemente pelo dinamarquês Ejnar Hertzsprung (1873-1967), em 1911, e pelo americano Henry Norris Russell (1877-1957), em 1913, como uma relação existente entre a luminosidade de uma estrela e sua temperatura efetiva (ou superficial).

A imagem abaixo traz um diagrama HR com quatro estrelas: A, B, C e D. Em seguida temos várias afirmações. Cada afirmação pode ser FALSA, VERDADEIRA ou INCONCLUSIVA.



Assinale a opção que traz a afirmação inconclusiva.

a) A estrela **A** é semelhante ao Sol.

b) A estrela **B** é mais massiva que o Sol.

c) A estrela **C** é mais fria que as outras estrelas.

d) O raio da estrela **B** é maior que o da estrela **C**.

e) A estrela **D** é uma estrela da Sequência Principal.

Resposta: b) A estrela **B** é mais massiva que o Sol.

Comentários:

- A afirmação "A estrela A é semelhante ao Sol" é VERDADEIRA, pois a estrela A é da Sequência Principal, como o Sol, e sua luminosidade está em torno de 1 L_{Sol}.
- A afirmação "A estrela **B** é mais massiva que o Sol." é INCONCLUSIVA, pois a relação luminosidade/massa é válida para estrelas da Sequência Principal, que não é o caso da estrela B. Se a estrela B fosse da Sequência Principal e fosse mais luminosa do que o Sol, aí, sim, poderíamos afirmar que ela seria mais massiva do que o Sol.
- A afirmação "A estrela C é mais fria que as outras estrelas" é VERDADEIRA, pois ela se encontra o mais à direita de todas no Diagrama HR, cuja temperatura decresce da esquerda para direita.
- A afirmação "O raio da estrela B é maior que o da estrela C" é FALSA, pois a estrela B está na região das Gigantes, mas a estrela C está na região das Super Gigantes, portanto com maior raio.
- A afirmação "A estrela D é uma estrela da sequência principal" é FALSA, pois ele se encontra na região das Anãs Brancas.

15) A Lei de Stefan-Boltzmann nos diz que o fluxo F (energia por unidade de área por unidade de tempo) emitido por um corpo negro à temperatura T é proporcional à quarta potência de T:

$$F = \sigma T^4$$

onde σ é a constante de Stefan-Boltzmann.

Como uma estrela não é um corpo negro, isto é, suas camadas externas, de onde provém a radiação, não estão exatamente em equilíbrio térmico e, portanto, a temperatura não é a mesma para toda a estrela, definimos um parâmetro chamado temperatura efetiva $\mathbf{T_{ef}}$, que é a temperatura de um corpo negro que emite a mesma quantidade de energia por unidade de área e por unidade de tempo que a estrela. Portanto, para uma estrela esférica de raio **R**, a luminosidade **L** (energia total por segundo) é obtida multiplicando-se o fluxo pela área da sua superfície: $4\pi R^2$.

$$L = 4\pi R^2 \sigma T_{ef}^4$$

Suponha uma estrela 100 vezes mais luminosa do que o Sol ($L = 100\ L_{Sol}$) e cuja temperatura efetiva seja a metade da do Sol ($T = T_{Sol}/2$).

Assinale a opção que traz a razão entre o raio da estrela e o raio do Sol.

a) 40

b) 50

c) 80

d) 100

e) 400

Resposta: a) 40

Vamos aplicar diretamente a fórmula da Lei de Stefan-Boltzmann:

$$\frac{L_*}{L_{Sol}} = \frac{4\pi R_*^2 \sigma T_*^4}{4\pi R_{Sol}^2 \sigma T_{Sol}^4} \rightarrow \frac{L_*}{L_{Sol}} = \frac{R_*^2 T_*^4}{R_{Sol}^2 T_{Sol}^4}$$

$$\frac{100 L_{Sol}}{L_{Sol}} = \frac{R_*^2}{R_{Sol}^2} \frac{\left(\frac{T_{Sol}}{2}\right)^4}{T_{Sol}^4} \rightarrow 100 = \left(\frac{R_*}{R_{Sol}}\right)^2 \frac{1}{16}$$

$$\left(\frac{R_*}{R_{Sol}}\right)^2 = 1.600 \rightarrow \frac{R_*}{R_{Sol}} = \sqrt{1.600} \rightarrow \frac{R_*}{R_{Sol}} = 40$$

GABARITO COMENTADO

Olimpíada Brasileira de Astronomia e Astronáutica

16) Ao contrário do que muitos podem pensar, o raio de influência gravitacional do super buraco negro central da Via Láctea, conhecido como *Sagittarius A** (lê-se: Sagitarius A "estrela"), com massa equivalente à 4,3 milhões de massas solares, é de alguns anos-luz. O que significa que o que mantém a Via Láctea unida é a gravidade de todo o resto - estrelas, gás, poeira e matéria escura. Percebemos, então, que a influência gravitacional de *Sagittarius A** sobre o Sol, que está a cerca de 26.000 anos-luz do centro da Via Láctea, é desprezível.

Podemos definir a esfera de influência gravitacional como uma região em torno de um buraco negro supermassivo na qual o movimento das estrelas se deve ao buraco negro. O raio desta esfera é denominado **raio de influência gravitacional r_i** e pode ser calculado através da seguinte fórmula:

$$r_i = \frac{GM_{BN}}{\sigma^2},$$

onde **G** é a Constante de Gravitação Universal, $\mathbf{M_{BN}}$ é a massa do buraco negro e $\boldsymbol{\sigma}$ é uma grandeza que tem a ver com a média das velocidades das estrelas em torno do buraco negro. Para *Sagittarius A** este raio vale aproximadamente **r_i = 10 anos-luz**.

NGC 3258 é uma galáxia elíptica gigante localizada na direção da constelação da Máquina Pneumática (Antlia). Os astrônomos sabem que em seu centro existe um super buraco negro com cerca de **520 vezes** a massa de *Sagittarius A** e que seu $\boldsymbol{\sigma}$ tem **3,3 vezes** o $\boldsymbol{\sigma}$ de *Sagittarius A**.

Sendo assim, assinale a opção que traz o valor aproximado do raio de influência gravitacional para o super buraco negro central da **Galáxia NGC 3258**.

a) 33,0 anos-luz

b) 330,0 anos-luz

c) 477,5 anos-luz

d) 520,0 anos-luz

e) 606,0 anos-luz

Resposta: c) 477,5 anos-luz

Das informações do texto, temos:

$$M_{BN}^{NGC} = 520 M_{BN}^{VL}$$
$$\sigma^{NGC} = 3{,}3\sigma^{VL}$$

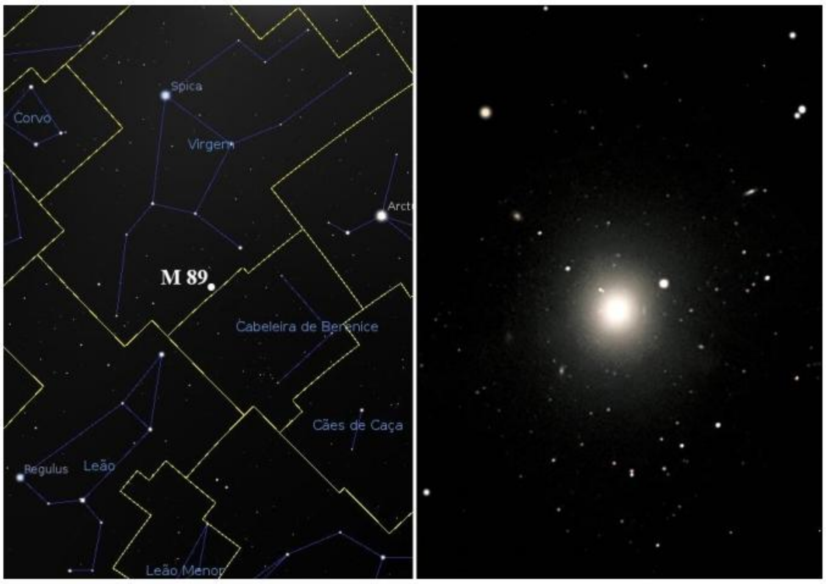
Equacionando o raio de influência gravitacional super buraco negro central de NGC 3258, temos:

$$r_i^{NGC} = \frac{GM_{BN}^{NGC}}{(\sigma^{NGC})^2}$$

Fazendo as substituições:

$$r_i^{NGC} = \frac{G(520M_{BN}^{VL})}{(3{,}3\sigma^{VL})^2} = \frac{520}{3{,}3^2}\left[\frac{GM_{BN}^{VL}}{(\sigma^{VL})^2}\right] = \frac{520}{10{,}89} \times 10\ anos - luz$$
$$r_i^{NGC} \cong 477{,}5\ anos - luz$$

17) M89 é uma das oito galáxias do aglomerado de Virgem que o astrônomo francês Charles Messier (1730-1817) descobriu em 1781. Esta galáxia é elíptica do tipo E0, ou seja, M89 é praticamente esférica. Está localizado a cerca de 50 milhões de anos-luz de distância na constelação de Virgem.



Seu diâmetro aparente de 4’ (minutos de arco) corresponde a um diâmetro real de D = 70.000,0 anos-luz. M89 contém aproximadamente N = 100 bilhões de estrelas e sua magnitude aparente vale m = 9,8.

Em primeira aproximação, vamos considerar que todas as estrelas de M89 são semelhantes entre si e que têm a mesma magnitude absoluta.

Deste modo, assinale a opção que traz a magnitude aparente de cada uma destas estrelas.

a) 9,8

b) 15,1

c) 17,7

d) 27,5

e) 37,3

Resposta: e) 37,3

Primeiramente, vamos relembrar a fórmula da soma de magnitudes. Se uma estrela de um binário tem magnitude aparente m_1 e a outra estrela, m_2, então a soma total das magnitudes (m_T) será:

$$m_T = -2{,}5\log(10^{-0{,}4m_1} + 10^{-0{,}4m_2})$$

Neste caso em particular de M89, todas as 100 bilhões de estrelas têm a mesma magnitude m:

$$m_T = -2{,}5\log(10^{-0{,}4m} + 10^{-0{,}4m} + \cdots + 10^{-0{,}4m})$$

$$m_T = -2{,}5\log(10^{11} \times 10^{-0{,}4m})$$

$$m_T = -2{,}5\log(10^{11}) - 2{,}5\log(10^{-0{,}4m})$$

$$9{,}8 = -2{,}5 \times 11 - 2{,}5 \times (-0{,}4m)$$

$$9{,}8 = -27{,}5 + m \rightarrow m = 27{,}5 + 9{,}8 = 37{,}3$$

18) Asteroides são objetos rochosos e metálicos que orbitam o Sol, mas são pequenos demais para serem considerados planetas. A dimensão dos asteroides pode variar desde centenas de quilômetros até a dimensão de pequenas pedras.

A Magnitude Absoluta **H** de um asteroide é definida, diferentemente da definição para as estrelas, como sua magnitude visual a uma distância de 1 unidade astronômica tanto do Sol como do observador, com um ângulo de fase igual a zero. Em outras palavras, é a magnitude visual do asteroide, situado a 1 unidade astronômica do Sol, sendo observado do próprio Sol. Apesar de ser um cenário impossível, é a maneira ideal para se ter uma medida de brilho que permita uma estimativa de seu tamanho.

Fazendo a assunção de um objeto esférico com uma superfície uniforme, o diâmetro **D** de um asteroide pode ser estimado usando a seguinte equação:

$$D[km] = \frac{1329}{\sqrt{p}} 10^{-0,2H}$$

Onde **p** é o albedo geométrico do asteroide. Sendo que, refletores de luz perfeitos têm p = 1 e absorvedores perfeitos têm p = 0. Normalmente o albedo de um asteroide não é conhecido e as estimativas são feitas considerando-se albedos geométricos entre 0,30 e 0,05.

Considere que um asteroide tenha magnitude absoluta H = 10,5 ± 0,5. Assinale o item que traz o valor aproximado do diâmetro médio desse asteroide, incluindo sua incerteza.

a) 30 ± 10 km

b) 37 ± 15 km

c) 37 ± 22 km

d) 59 ± 15 km

e) 59 ± 22 km

Resposta: c) 37 ± 22 km

Os possíveis valores para o diâmetro do asteroide são resultado da incerteza de 0,5 mag da sua magnitude absoluta e da faixa de possíveis albedos ($0,05 \leq p \leq 0,30$).

Pela expressão dada, o diâmetro máximo do asteroide é calculado utilizando-se o menor valor do albedo, que está no denominador da fração, e o menor valor da magnitude absoluta, pois o expoente do 10 é negativo. O contrário vale para o diâmetro mínimo.

Para p = 0,05 e H = 10,0:

$$D_{max} = \frac{1329}{\sqrt{0,05}} 10^{-0,2\times 10} \rightarrow D_{max} \cong 59,4\ km \approx 59\ km$$

Para p = 0,30 e H = 11,0:

$$D_{min} = \frac{1329}{\sqrt{0{,}30}} 10^{-0{,}2 \times 11} \rightarrow D_{min} \cong 15{,}3\ km \approx 15\ km$$

O diâmetro médio, será então:

$$< D > = \frac{D_{min} + D_{max}}{2} = \frac{15 + 59}{2} = 37\ km$$

Sua incerteza será 37 km - 15 km (ou 59 km - 37 km) = 22 km

$< D > = 37 \pm 22$ km

GABARITO COMENTADO

Olimpíada Brasileira de Astronomia e Astronáutica

19) Um buraco negro é um objeto extremamente denso no espaço. Embora possam ser enigmáticos, a Ciência conseguiu decifrar muito sobre eles. Por exemplo, sabemos que os buracos negros são uma manifestação fundamental da gravidade.

Quando uma grande quantidade de massa é comprimida em um espaço pequeno o suficiente, o objeto resultante rompe o próprio tecido do espaço e do tempo, tornando-se o que é chamado de singularidade. Se considerarmos a velocidade da luz como limite da velocidade de escape de um buraco negro, chegamos ao que se conhece como **Raio de Schwarzschild r_{Sch}** de uma região esférica em torno da singularidade.

$$r_{Sch} = \frac{2GM_{bn}}{c^2}$$

Como temos uma região esférica em torno da singularidade, podemos dividir a massa do buraco negro por esse volume e definir uma densidade média para um buraco negro, apesar da densidade ser considerada infinita para a singularidade em si.

Sendo assim, assinale a opção que traz a massa aproximada de um buraco negro, em unidades de massa solar, com a mesma densidade média da Terra.

Dados: massa do Sol $M_{Sol} = 2{,}00 \times 10^{30}$ kg, massa da Terra $M_{Terra} = 5{,}97 \times 10^{24}$ kg, Raio da Terra $R_{Terra} = 6{,}37 \times 10^{6}$ m, G = $6{,}67 \times 10^{-11}$ m^{3}kg^{-1} s^{-2}, $c = 3{,}00 \times 10^{8}$ ms^{-1}

a) $5{,}51 \times 10^{3}$

b) $6{,}67 \times 10^{5}$

c) $1{,}15 \times 10^{7}$

d) $5{,}75 \times 10^{7}$

e) $3{,}00 \times 10^{8}$

Resposta: d) $5{,}75 \times 10^{7}$

Primeiro precisamos achar a densidade média da Terra, que não foi dada:

Densidade da Terra: massa da Terra/volume da Terra

$$\rho_{Terra} = \frac{5{,}97 \times 10^{24}\ kg}{\frac{4}{3}\pi(6{,}37 \times 10^{6}\ m)^3} \cong 5{,}51 \times 10^{3}\ \frac{kg}{m^3}$$

O buraco negro tem um raio igual ao raio de Schwarzschild:

$$r_{Sch} = \frac{2GM_{bn}}{c^2}$$

Sua densidade média, então, será:

$$\rho_{bn} = \frac{M_{bn}}{V_{Sch}} = \frac{M_{bn}}{\frac{4}{3}\pi\left(\frac{2GM_{bn}}{c^2}\right)^3} = \frac{3c^6}{32\pi G^3 M_{bn}^2}$$

Isolando a massa do buraco negro, teremos:

$$M_{bn}^2 = \frac{3c^6}{32\pi G^3 \rho_{bn}}$$

Como ρ_{bn} tem que ser igual a ρ_{Terra} e substituindo-se os valores, teremos:

$$M_{bn} = \sqrt{\frac{3 \times (3 \times 10^8)^6}{32\pi \times (6{,}67 \times 10^{-11})^3 \times 5{,}51 \times 10^3}}$$

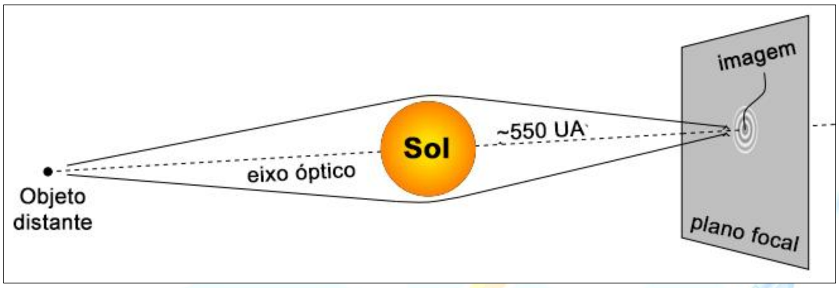
$$M_{bn} \cong 1{,}15 \times 10^{38}\ kg$$

Em termos de massas solares:

$$M_{bn} = \frac{1{,}15 \times 10^{38}\ kg}{2{,}00 \times 10^{30}\ kg} = 5{,}75 \times 10^7\ M_{Sol}$$

20) De acordo com a Teoria Geral da Relatividade, objetos massivos como o Sol curvam raios de luz. A lente gravitacional solar (*solar gravitational lens* ou SGL, em inglês) resultante pode ser usada como um instrumento fornecido pela Natureza: parte de um telescópio imensamente poderoso com considerável amplificação de luz e capacidades significativas de resolução angular, apesar de ser uma lente imperfeita, que sofre de aberração esférica e astigmatismo. Além disso, embora a amplificação de luz da SGL seja tremenda, qualquer sinal de uma fonte tênue e distante é sobrecarregado pela luz do Sol e da Coroa Solar. Esses desafios devem ser enfrentados se a SGL for considerada um "instrumento" prático para observações de alta resolução de alvos extrassolares distantes

A região focal da SGL começa além de ~ 550 unidades astronômicas (UA) do Sol. Isso é pouco mais de três vezes a distância até nossa nave espacial mais distante até o momento, a Voyager 1, que está atualmente a mais de 165 UA. Um esquema fora de escala pode ser visto na imagem a seguir.



Se um raio de luz de um objeto muito distante passa a uma distância **R** bem próxima a uma grande massa **M**, este raio será desviado por um valor **ϕ**. Este desvio pode ser calculado através da seguinte equação:

$$\phi = \frac{4GM}{c^2 R}$$

onde G é a Constante Gravitacional Universal e c, a velocidade da luz.

Considere o planeta Júpiter e a lente gravitacional devido à sua massa e assinale a opção que traz a distância focal aproximada desta lente.

Dados: Diâmetro de Jupiter $\varnothing_{\text{Júpiter}}$ = 142.984 km; Massa de Júpiter $M_{\text{Júpiter}}$ = 1,90 × 10^{27} kg;
Constante gravitacional G = 6,67 × 10^{-11} m^3 kg^{-1} s^{-2}; Velocidade da luz c = 300.000 km/s
Unidade Astronômica = 1,50 × 10^{11} m.

a) 1.500 UA

b) 3.000 UA

c) 5.500 UA

d) 6.000 UA

e) 7.100 UA

Resposta: d) 6.000 UA

O raio de Júpiter vale 142.984 km/2 = 71.492 km = 71.492.000 m

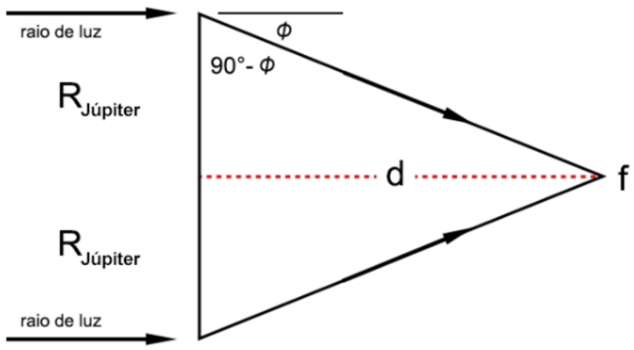
Substituindo-se os valores na fórmula dada, temos:

$$\phi = \frac{4(6{,}67 \times 10^{-11})(1{,}90 \times 10^{27})}{(3{,}00 \times 10^{8})^2(71.492.000\ )} \cong 7{,}88 \times 10^{-8}\ radianos$$

Você pode trabalhar com radianos ou passar o ângulo para graus:

$$\frac{\phi}{7{,}88 \times 10^{-8}\ radianos} = \frac{180°}{\pi\ radianos} \rightarrow \phi \cong (4{,}51 \times 10^{-6})^{\circ}$$

A geometria do problema pode ser vista, fora de escala, no desenho a seguir:



Pela geometria, temos:

$$\tan(90° - \phi) = \frac{d_{focal}}{R_{Júpiter}} \rightarrow d_{focal} = R_{Júpiter} \times \tan(90° - \phi)$$

Substituindo-se os valores, temos:

$$d_{focal} = (71.492\ \mathrm{km}) \times \tan\left[90° - (4{,}51 \times 10^{-6})^{\circ}\right]$$

$$d_{focal} \cong 71.492\ km \times 1{,}27 \times 10^{7} \cong 9{,}10 \times 10^{11}\ km = 9{,}10 \times 10^{14}\ m$$

Dividindo pelo valor de 1 UA:

$$d_{focal} = \frac{9{,}10 \times 10^{14}\ m}{1{,}50 \times 10^{11}\ m/UA} \cong 6{,}06 \times 10^{3} UA \approx 6.000\ \mathrm{UA}$$